INSTITUT SUPERIEUR DU COMMERCE
ETABLISSEMENT PRIVE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR RECONNU PAR L'ETAT
DIPLOME VISE PAR LE MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE
22, BOULEVARD DU FORT DE VAUX 75017 PARIS - TEL : (1) 42.70.34.80/90.95

Session de 1986
Concours d'admission
MATHÉMATHIQUES
Durée : 4 heures
Option Générale : Coefficient : 4

EXERCICE 1 *(5 points)*

On considère n urnes numérotées de 1 à n et on suppose que pour tout nombre k compris entre 1 et n l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une urne parmi les n et dans cette urne on tire au hasard une boule. On note X_n le numéro aléatoire de l'urne choisie et N_n le numéro aléatoire de la boule obtenue.

1°) Dans cette question on suppose que l'on a : $n = 3$.

i) Déterminer la loi du couple (X_3, N_3). (On présentera les résultats sous forme de tableau à double entrée).

ii) Déterminer la loi de N_3, ainsi que son espérance et sa variance.

iii) X_3 et N_3 sont-elles indépendantes ? Calculer leur coefficient de corrélation.

2°) Dans cette question, on suppose que n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

i) Montrer que N_n prend ses valeurs entre 1 et n et que l'on a :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \ , \ P(N_n = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

où P (A) designe la probabilité de l'evenement A.

ii) En transformant les sommations rencontrées, calculer l'espérance et la variance de N_n.

EXERCICE 2 *(5 points)*

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices réelles carrées d'ordre 3. Pour $A \in \mathcal{M}$ on note a_{ij} l'élément de A situé à l'intersection de sa $i^{ème}$ ligne et sa $j^{ème}$ colonne.

a) Une matrice A de $\mathcal{M}$ est dite « symétrique » si :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\} \ , \ a_{ij} = a_{ji}$$

b) Une matrice A de $\mathcal{M}$ est dite « antisymétrique » si :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3\} \ , \ a_{ij} = -a_{ji}$$

c) une matrice A de $\mathcal{M}$ est dite « magique » si les six nombres :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{1k} \ , \ \sum_{k=1}^{3} a_{2k} \ , \ \sum_{k=1}^{3} a_{3k} \ , \ \sum_{k=1}^{3} a_{k1} \ , \ \sum_{k=1}^{3} a_{k2} \ , \ \sum_{k=1}^{3} a_{k3}$$

sont égaux. La valeur commune de ces six sommes sera alors notée s(A) et appelée la « somme » de A.

Enfin J désigne la matrice de $\mathcal{M}$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1°) Montrer qu'une matrice A de $\mathcal{M}$ est magique de somme s(A) si et seulement si l'on a : $AJ = JA = s(A)\,J$

2°) Montrer que l'ensemble E des matrices magiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$ et que le produit de deux matrices magiques est encore magique.

3°) Quelles sont les propriétés de l'application s, définie sur E, qui à A associe s(A) ?

4°) Soit E_0 l'ensemble des matrices magiques de somme nulle.

i) Quelle est la relation liant la dimension de E à celle de E_0 ?

ii) Déterminer les matrices symétriques appartenant à E_0 et les matrices antisymétriques appartenant à E_0.

PROBLÈME *(10 points)*

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'application φ qui à toute fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$$

F étant définie pour les valeurs de x telles que l'intégrale précédente ait un sens.

Nous attirons l'attention sur le fait que dans l'intégrale précédente, t est la variable d'intégration, x jouant le rôle de paramètre réel).

I) Expliciter F, en précisant à chaque fois son domaine de définition, dans les cas suivants :

1°) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ , \ f(t) = 1$

2°) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ , \ f(t) = e^t$

3°) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \ , \ f(t) = t^3$

II) On désigne par L l'ensemble des fonctions f définies positives et continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall m \in \mathbb{R}_+^* \ , \ \lim_{t \to +\infty} e^{-mt} f(t) = 0$$

Tournez la page S. V. P.

1°) Montrer que la somme de deux éléments de L appartient à L et que L contient les fonctions $t \to t^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

2°) Soit $f \in L$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$:

i) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(t) = e^{-\frac{x}{2}t} . f(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$

On notera M un majorant de g sur $\mathbb{R}_+$

iii) En déduire l'existence de l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\, dt$

3°) Soit $f \in L$, $F = \varphi(f)$ la fonction associée à f. Montrer que l'on a :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$$

II)

1°) Montrer que l'on a :

i) $\forall u \in \mathbb{R}_+ , \ e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} e^u \leq 0$

ii) $\forall u \in]-\infty, 0] , \ e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} \leq 0$

2°) Déduire de la question précédente que l'on a :

$$\forall u \in \mathbb{R} , \ e^u - 1 - u \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}$$

3°) Soit $f \in L$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \to t^n f(t)$ appartient encore à L.

4°) Soit $f \in L$, $F = \varphi(f)$ la fonction associée à f et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que l'on a pour tout nombre réel h tel que $|h| < \frac{x}{2}$:

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-\frac{x}{2}t} dt$$

(on posera $u = -ht$)

5°) En déduire que si $f \in L$, $F = \varphi(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer $F'(x)$, pour $x > 0$, à l'aide d'une intégrale.

Montrer que F est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.